Phân số

Giới hạn thời gian: 1.0s **Giới hạn bộ nhớ:** 256M

Câu I. Phân số *(6,0 điểm)*

Hưng Phi Nhon là một cậu học trò chăm chỉ. Một hôm, Hưng đang học về phân số và nghĩ ra một cách *"rút gọn"* rất đặc biệt. Nếu tử số và mẫu số có chung một chữ số, Hưng sẽ gạch bỏ chữ số đó ở cả tử và mẫu.

Ví dụ: Hưng rút gọn phân số $\frac{16}{64}$ bằng cách gạch bỏ chữ số 6 ở cả tử và mẫu, thu được $\frac{1}{4}$. Thật bất ngờ, phân số mới vẫn có giá trị bằng phân số ban đầu: $\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$

Tuy nhiên, cách làm này không phải lúc nào cũng đúng. Chẳng hạn, với $\frac{12}{24}$, nếu gạch bỏ chữ số 2, ta được $\frac{1}{4}$, nhưng: $\frac{12}{24} \neq \frac{1}{4}$.

Yêu cầu Cho phân số $\frac{a}{b}$ với $10 \leq a < b \leq 99$. Hãy kiểm tra xem phân số đó có phải là một phân số kỳ lạ hay không, tức là tồn tại một chữ số chung có thể gạch bỏ ở cả tử và mẫu sao cho giá trị phân số không thay đổi.

Lưu ý: *Không xét trường hợp tầm thường khi chữ số bị gạch bỏ là 0 ở hàng đơn vị của cả tử và mẫu.* $\frac{30}{50} \to \frac{3}{5}$ *chỉ là phép rút gọn thông thường bằng cách chia cả tử và mẫu cho 10, nên không được coi là phân số kỳ lạ.*

Dữ liệu vào từ file văn bản FRAC.INP

- Dòng đầu tiên chứa số nguyên dương T $(1 \leq T \leq 10^5)$ — số lượng bộ test.
- Mỗi dòng trong T dòng tiếp theo chứa hai số nguyên a và b $(10 \leq a < b \leq 99)$.

Kết quả ghi ra file văn bản FRAC.OUT:

- Với mỗi bộ test, in ra **YES** nếu phân số là phân số kỳ lạ hoặc **NO** nếu không phải.

Ví dụ:

FRAC.INP	FRAC.OUT
4 16 64 12 24 19 95 26 65	YES NO YES YES

Phần tử trung tâm

Giới hạn thời gian: 1.0s **Giới hạn bộ nhớ:** 256M

Câu II. Phần tử trung tâm *(5,0 điểm)*

Cho mảng số nguyên dương A gồm N phần tử được đánh số thứ tự từ 1 đến N. Cho trước hai số nguyên không âm T và K.

Một vị trí i ($T < i \leq N - T$) được gọi là một *"phần tử trung tâm"* nếu nó thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

- Xét đoạn T phần tử kề trước i và phần tử i (tức là mảng con $A[i - T \ldots i]$): Số lượng cặp phần tử kề nhau có giá trị tăng ngặt (tức là $A_j < A_{j+1}$ với $i - T \leq j < i$) không vượt quá K.
- Xét đoạn T phần tử kề sau i và phần tử i (tức là mảng con $A[i \ldots i + T]$): Số lượng cặp phần tử kề nhau có giá trị giảm ngặt (tức là $A_j > A_{j+1}$ với $i \leq j < i + T$) không vượt quá K.

Yêu cầu: Đếm số lượng phần tử trung tâm có trong mảng A và liệt kê chỉ số của chúng.

Dữ liệu vào từ file văn bản CENTER.INP

- Dòng đầu tiên chứa ba số nguyên N, T, K ($1 \leq N \leq 10^5$; $1 \leq T \leq \frac{N}{2}$; $0 \leq K \leq T$).
- Dòng thứ hai chứa N số nguyên dương $A_1, A_2, \ldots, A_N$ ($1 \leq A_i \leq 10^9$) là các phần tử của mảng A.

Kết quả ghi ra file văn bản CENTER.OUT:

- Dòng đầu tiên ghi một số nguyên C là số lượng phần tử trung tâm tìm được.
- Dòng thứ hai ghi C số nguyên là chỉ số của các phần tử trung tâm theo thứ tự tăng dần, cách nhau bởi một khoảng trắng. Nếu $C = 0$, dòng này có thể để trống.

Ràng buộc:

- 40% số test tương ứng với 40% số điểm có $N \leq 1000$.
- 40% số test tương ứng với 40% số điểm có $K = 0$.
- 20% số test tương ứng với 20% số điểm còn lại không có giới hạn gì thêm.

Ví dụ:

CENTER.INP	CENTER.OUT
9 2 1 8 5 6 4 5 7 3 4 9	4 3 4 5 7

Bán bóng

Giới hạn thời gian: 1.0s **Giới hạn bộ nhớ:** 256M

Câu III. Bán Bóng *(4,0 điểm)*

Bạn đang quản lý một nhà kho chứa rất nhiều quả bóng với các màu sắc khác nhau. Hiện tại, bạn có N loại màu bóng, loại màu thứ i đang có sẵn A_i quả.Hôm nay, có một vị khách hàng mang sở thích kỳ lạ đến cửa hàng của bạn và muốn đặt mua đúng K quả bóng (khách không quan tâm đến màu sắc, chỉ cần đủ số lượng). Vị khách này định giá các quả bóng theo một quy tắc đặc biệt: *Giá trị mua vào của một quả bóng bằng đúng số lượng quả bóng cùng màu với nó hiện đang có trong kho của bạn.*

Ví dụ:

- Nếu bạn đang có 6 quả bóng màu vàng, quả bóng màu vàng đầu tiên bạn bán ra sẽ thu về lợi nhuận là 6.
- Sau khi giao dịch, kho chỉ còn 5 quả bóng màu vàng. Do đó, quả bóng màu vàng tiếp theo nếu được bán sẽ chỉ thu về lợi nhuận là 5.
- Cứ như vậy, giá trị của mỗi màu bóng sẽ giảm đi 1 đơn vị sau mỗi lần bạn bán ra một quả thuộc màu đó.

Bạn có quyền chọn bán các quả bóng theo bất kỳ thứ tự nào để tối ưu hóa doanh thu.

Yêu cầu: Hãy tính toán tổng lợi nhuận lớn nhất mà bạn có thể đạt được sau khi bán thành công K quả bóng cho vị khách hàng này. Vì kết quả có thể rất lớn, hãy in ra phần dư của tổng lợi nhuận khi chia cho $10^9 + 7$.

Dữ liệu vào từ file văn bản BALLS.INP

- Dòng đầu tiên chứa hai số nguyên dương N và K ($1 \leq N \leq 10^5, 1 \leq K \leq 10^{15}$) — lần lượt là số lượng màu sắc bóng khác nhau và số lượng bóng khách hàng muốn mua.
- Dòng thứ hai chứa N số nguyên $A_1, A_2, \ldots, A_N$ ($1 \leq A_i \leq 10^9$) — trong đó A_i là số lượng quả bóng của màu thứ i mà bạn đang sở hữu.
- *Dữ liệu luôn đảm bảo K nhỏ hơn hoặc bằng tổng số lượng tất cả quả bóng có trong kho.*

Kết quả ghi ra file văn bản BALLS.OUT:

- In ra một số nguyên duy nhất là lợi nhuận lớn nhất thu được, lấy phần dư cho $10^9 + 7$

Ràng buộc:

- 30% số test tương ứng với 30% số điểm có $N \leq 1000, A_i \leq 1000, K \leq 10^4$.
- 30% số test tương ứng với 30% số điểm có $N \leq 10^5, A_i \leq 10^5, K \leq 10^5$.
- 20% số test tương ứng với 20% số điểm có $A_1 = A_2 = \cdots = A_N$.
- 20% số test tương ứng với 20% số điểm còn lại không có giới hạn gì thêm.

Ví dụ:

BALLS.INP	BALLS.OUT	Giải thích
2 4 2 5	14	Có 2 loại bóng: màu 1 (2 quả), màu 2 (5 quả). Khách muốn mua 4 quả. - Bán quả màu 2 thứ nhất: thu về 5, còn 4 quả. - Bán quả màu 2 thứ hai: thu về 4, còn 3 quả. - Bán quả màu 2 thứ ba: thu về 3, còn 2 quả. - Bán quả màu 1 thứ nhất: thu về 2, còn 1 quả. Tổng lợi nhuận: $5 + 4 + 3 + 2 = 14$.

Đồng bộ dữ liệu

Giới hạn thời gian: 1.0s **Giới hạn bộ nhớ:** 256M

Câu IV. Đồng bộ dữ liệu *(3,0 điểm)*

Trong quá trình truyền tải thông tin trên mạng máy tính, một tệp dữ liệu quan trọng được chia nhỏ thành N gói tin, được đánh số thứ tự từ 1 đến N.

Tuy nhiên, do được định tuyến qua các đường truyền vật lý khác nhau, thứ tự các gói tin khi cập bến hai máy chủ thu A và B đã bị xáo trộn hoàn toàn. Dù vậy, giao thức truyền tải đảm bảo rằng không có gói tin nào bị thất lạc hay bị nhân bản; nói cách khác, danh sách các gói tin nhận được tại A và B đều là các hoán vị của các số nguyên từ 1 đến N.

Tú – quản trị viên của hệ thống mạng – đang cần đồng bộ hóa lại tệp dữ liệu này. Để so khớp và khôi phục thông tin, bước đầu tiên hệ thống của Tú cần làm là tìm ra một chuỗi các gói tin dài nhất xuất hiện theo đúng thứ tự tương đối ở cả hai máy chủ (Dãy con chung dài nhất).

Yêu cầu: Hãy tính độ dài dãy gói tin chung dài nhất giữa hai máy chủ A và B.

Dữ liệu vào từ file văn bản PLCS.INP

- Dòng đầu tiên chứa số nguyên dương N $(1 \leq N \leq 10^5)$ là số lượng gói tin.
- Dòng thứ hai chứa N số nguyên dương miêu tả thứ tự các gói tin đến máy chủ A.
- Dòng thứ ba chứa N số nguyên dương miêu tả thứ tự các gói tin đến máy chủ B.
- Các số trên cùng một dòng cách nhau một khoảng trắng.

Kết quả ghi ra file văn bản PLCS.OUT:

- In ra một số nguyên duy nhất là độ dài dãy con chung dài nhất tìm được.

Ràng buộc:

- 60% số test tương ứng với 30% số điểm có $N \leq 5000$.
- 40% số test còn lại tương ứng với 40% số điểm còn lại không có giới hạn gì thêm.

Ví dụ:

PLCS.INP	PLCS.OUT	Giải thích
5 1 2 3 4 5 2 1 4 5 3	3	Dãy gói tin chung dài nhất của A và B xuất hiện theo đúng thứ tự có thể là $(2, 4, 5)$ hoặc $(1, 4, 5)$. Cả hai phương án này đều có độ dài lớn nhất là 3.

Dạo chơi thành phố

Giới hạn thời gian: 1.0s **Giới hạn bộ nhớ:** 256M

Câu V. Dạo chơi thành phố *(2,0 điểm)*

Các em trong đội tuyển Tin học là những người rất yêu thích môn Toán học, đặc biệt là khi xem xét về tính chẵn lẻ của các con số. Chính vì thế, mỗi bài toán đặt ra, các bạn đều nghĩ xem nên giải quyết như thế nào nếu kết quả buộc phải là số chẵn hoặc phải là số lẻ.

Đúng vào dịp các bạn tham gia kỳ thi Olympic khu vực, ngày hôm nay là một ngày đẹp trời, các bạn trong đội tuyển quyết định sẽ ra ngoài để dạo chơi, thăm thú và thư giãn.

Thành phố được xem là một đồ thị hai chiều, các đỉnh là N địa điểm và giữa hai địa điểm có tối đa một con đường hai chiều nối chúng. Các con đường trong thành phố được chia làm hai loại: loại 1 (đường an toàn) và loại 2 (đường đang bảo trì). Vì muốn chuyến đi dạo suôn sẻ, các bạn quyết định chỉ di chuyển trên các con đường loại 1.

Các con đường loại 1 sẽ nối các địa điểm lại thành những khu vực di chuyển liên thông với nhau. Bên cạnh đó, vì luôn nghĩ đến những con số chẵn lẻ, các bạn quy định một khu vực di chuyển được coi là ***"lý tưởng"*** nếu trong khu vực đó không tồn tại hai địa điểm A và B bất kỳ nào sao cho từ A có thể đi đến B thông qua cả một số chẵn và một số lẻ các con đường (tất nhiên chỉ tính các đường loại 1).

Yêu cầu: Cho M truy vấn, mỗi truy vấn gồm hai địa điểm x và y. Hãy xác định xem địa điểm x và địa điểm y có cùng nằm trong một khu vực ***"lý tưởng"*** hay không.

Dữ liệu vào từ file văn bản WALK.INP:

- Dòng đầu tiên chứa ba số nguyên dương N, E, M ($1 \leq N, E, M \leq 100000$) — lần lượt là số lượng địa điểm, số lượng con đường trong thành phố và số lượng truy vấn.
- E dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa ba số nguyên dương u, v, w thể hiện có một đường nối trực tiếp hai địa điểm u và v, với w là loại đường ($w = 1$ hoặc $w = 2$).
- M dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa hai địa điểm x và y ($1 \leq x, y \leq N$) mô tả một truy vấn.

Kết quả ghi ra file văn bản WALK.OUT:

- Gồm M dòng, mỗi dòng ghi **YES** hoặc **NO** tương ứng với việc địa điểm x và địa điểm y có cùng thuộc một khu vực lý tưởng hay không.

Ràng buộc:

- 40% số test tương ứng với 40% số điểm $N, E, M \leq 1000$.
- 40% số test tương ứng với 40% số điểm có $w = 1$ với mọi con đường
- 20% số test còn lại tương ứng với 20% số điểm còn lại không có giới hạn gì thêm.

Ví dụ:

WALK.INP	WALK.OUT	Giải thích
5 5 3 1 2 1 2 3 1 3 1 1 4 5 1 2 4 2 1 2 4 5 1 4	NO YES NO	Khi chỉ xét các con đường loại 1, thành phố chia thành 2 khu vực thông nhau: Khu vực gồm các địa điểm $\{1, 2, 3\}$ và Khu vực gồm các địa điểm $\{4, 5\}$. Xét khu vực $\{1, 2, 3\}$: • Từ địa điểm 1 đi đến địa điểm 2 có thể đi trực tiếp qua tuyến $(1 \rightarrow 2)$ mất 1 con đường (số lẻ). • Tuy nhiên, từ địa điểm 1 cũng có thể đi đến địa điểm 2 qua tuyến vòng $(1 \rightarrow 3 \rightarrow 2)$ mất 2 con đường (số chẵn). • Vì tồn tại hai địa điểm (1 và 2) có thể đi đến nhau bằng cả số chẵn và lẻ con đường, khu vực này không lý tưởng. Xét khu vực $\{4, 5\}$: • Chỉ có duy nhất 1 con đường nối giữa 4 và 5. Từ 4 đến 5 luôn mất số lẻ con đường. Không có cách nào đi vòng mất số chẵn con đường. • Khu vực này lý tưởng. Truy vấn `1 4`: Hai địa điểm này không thể đi đến nhau bằng đường loại 1.